117. *Khinchine* ノ一定理ニ就テ

森本 清吾 (物理學校)

Khinchine カラ先日 *Über ein metrisches*

Problem der additiven Zahlentheorie ト云フ論文ヲモライマシタ。
雑誌名ハ、ハッキリシマセンガ欄外ニ MATEMATИЧЕСКИЙ СБОРНИК, T. 40, No. 2. トアリマシタ。コノ中ニ次ノヤウナ定理ガアリマシタ。

定理. 数列 φ ト次ノ数列

$$1, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

トノ和数列ヲ ψ トスル。φ ノ密度ガ α ヨリ小サクナケレバ ψ ノ密度ハ $\alpha(1+\gamma\alpha(1-\alpha)^2)$ ヨリ小サクナイ。但シ γ ハ絶對常数デアル。

コヽデ数列トハ自然数ノ中カラソノ一部分ヲ選ビ出シタ数群ヲ云フノデ、同ジ数ガ二度表ハレテ来ルヤウナコトハ考ヘテ居マセン。ソレ故小サイモノカラ順次大キイモノヘト並ンデ居ルト思ッタ方ガヨイデショウ。二ツノ数列 φ, φ' ノ和数列トハ、φ ノ数, φ' ノ数及ビ φ ノ一数ト φ' ノ一数ノ和デアルヤウナ数全体カラ成ル数列ヲ云ヒマスガ、コノトキモ勿論同一ノ数ハ一度シカ数ヘマセン。数列 φ ノ密度トハ n ヨリ小サイ φ ニ属スル数ノ箇数ヲ $\varphi(n)$ トシタトキ

$$\varphi(n) \geqq \alpha n$$

ガ常ニ成立スルヤウナ数 α ヲ云ヒマス。密度ガ α ヨリ小サクナイ二ツノ数列ノ和数列ノ密度ハ α ヨリ大キイ或ル数ヨリ小サクナイト云フ種類ノ定理ハ今マデ幾ツカ発表サレテ居ルソウデ Landau ノ Göttinger Nachrichten

1930, S. 269. ニアル論文ナドソノ代表的ナモノダソウデス。上ノ定理ハ (1) ノ密度ガ0デアルト云フコトカラシテ、コノ種ノ研究デ一歩新シイ方面ニフミ出シタモノダト書イテアリマス。コノ定理ノ証明ハ思ヒノ外面倒デ而モソノ結果ハ思ヒノ外芳シクナイノデスガ、Khinchine モ之レヲ認メテ居ルト見ヘ、セメテ $(1-\alpha)^2$ ノ2ヲトリタイ，コレハ可能ノヤウニ思ハレルガ未ダ出来ナイト書イテアリマス。ソコデ私ハコノ2ヲトッテ見タイト思フノデス。

コノ目的ノタメ次ノ語法ヲ用ヒマセウ。密度ト云フ意味ヲ擴張シテ $a \leqq x \leqq b$ ナル x ノ中 φ ニ属スル数ノ数ヲ $\varphi(a,b)$ トシ、コノ間ノ自然数ノ数ヲ $[a,b]$ トシタトキ $\dfrac{\varphi(a\,b)}{[a,b]}$ ヲ (a,b) ニ於ケル φ ノ密度ト呼ビマセウ。ソレカラ φ ニ属スル二数 m,n ノ間ニ φ ニ属サナイ数ノミアルトキ、コレヲ φ ノスキマ (m,n) ト呼ビマセウ。ソコデ Khinchine ノ定理デ α ガ $\frac{1}{2}$ ノ場合ヲ考ヘマスト．ψ ノ密度ハ $\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{4}\right)$ ヨリ小サクナイコトニナリマス。之ヲ用ヒルコトニシマセウ。

茲デ証明スベキコトハ

N ヨリ大キクナイスベテノ n ニ對シテ $\varphi(n) \geqq \alpha n \; (\alpha < \frac{1}{2})$ ナラバ $\psi(N) \geqq \alpha\{1+r'\alpha(1-\alpha)\}N$ デアル。

ト云フコトデアリマス。$\alpha \geqq \frac{1}{2}$ ノトキハ $1-\alpha$ ハ 0 ニ近クナイカラソノ肩ノ2ハ問題ニナラナイノデス。

$(1,N)$ ニ於ケル最モ大キイ（N ニ近イコト）スキマヲ

(b_1, a_1+1) トシマス。 b_1 ヨリ大キクナイ自然数ヲ c_1 トシ (c_1, a_1) ニ於ケル φ ノ密度ヲ考ヘマセウ。c_1 ガ b_1 トナレバコノ密度ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ大キクナイコトハ明デス。$(1, a_1)$ ニ於テハ密度ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ大キイノデスカラ c_1 ヲ適當ニトリコノ密度ガ $\frac{1}{2}$ ニ等シイヤウニスルコトガ出來マス。[(c_1, a_1) ニ於ケル密度ガ $\frac{1}{2}$ ヨリ小サイトキハコノ間ノ φ ノ數ハ全部ノ自然數ノ半分ヨリ小サイノデアルカラ、φ ノ數ガ一ツ増シテモ半分ヨリ大キクナルコトハナイカラ、密度ガ $\frac{1}{2}$ ヨリ小サイトキト大キイトキトノ間ニ必ズ $\frac{1}{2}$ ニ等シイトキガアル] カヤウナ c_1 ノ中ノ一番大キイモノヲトリマセウ。但シコノトキ c_1-1 ガ φ ニ屬サナイトキハ (c_1-1, a_1) ニ於ケル密度ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ小サクナルカラ又 c_1 ヲ小サクシテ之レガ $\frac{1}{2}$ ニ等シイヤウニスル。サウスルト (c_1, a_1) ニ於ケル φ ノ密度ハ $\frac{1}{2}$ ニ等シク c_1-1 ハ φ ニ屬シ c_1 ヨリ大キナ數 d_1 ニツイテハ (d_1, a_1) ニ於ケル密度ガ $\frac{1}{2}$ ヨリ大キクナイヤウニ出來マス。サウスルト (c_1, d_1-1) ニ於ケル密度ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ小サクナイ。次ニ c_1 ヨリ小サイ最大ノ (c_1 ニ近イ意) スキマヲ (b_2, a_2+1) トシ之レカラ上ノヤウナ方法デ區間 (c_2, a_2) ヲ作リマス。之レヲ繰リカヘシテ行ッテ $(1, N)$ ノ中ノスキマヲ全部同様ノ性質ヲモツ區間 (c_n, a_n) (c_{n-1}, a_{n-1}) ------ (c_1, a_1) デオホフコトガ出來マス。

ソコデ區間 (c_i, a_i) ニ於ケル ψ ノ密度ヲ考ヘマセウ。之レガタメニハ (c_i, a_i) ノ間ノ φ ノ數カラ c_i-1 ヲ引イタ

列ヲ考ヘルト之レハ密度 $\frac{1}{2}$ ノ列ヲ作リ之レト(1)ノ数トノ和数列ニ c_i-1 ヲ加ヘタモノガ (c_i, a_i) ニ於ケル ψ ニ含マレマス。(c_i-1 モ φ ニ属シマスカラ(1)ノ数ニ c_i-1 ヲ加ヘタ数モ ψ ニ属シマス)。故ニ (c_i, a_i) ニ於ケル ψ ノ密度ハ $\frac{1}{2}(1+\frac{\gamma}{4})$ ヨリ大キイノデス。

サテ $\varphi(N)=\alpha' N$ $(\alpha' \geqq \alpha)$ トシマスト $(1, N)$ ニ φ ニ属サナイ数ハ $(1-\alpha')N$ 箇アルワケデス。コレ等ハ皆何レカノ (c_i, a_i) 内ニ、丁度ソノ半分ヅツ入ッテ居マス。シカルニ ψ ニ於テハ (c_i, a_i) 内ニ之レニ属サナイ数ハソノ $\frac{1}{2}(1-\frac{\gamma}{4})$ ヨリ少クシカ入ッテ居ナイノデスカラ $(1, N)$ 間ニ ψ ニ属サナイ数ハ

$$(1-\alpha')(1-\frac{\gamma}{4})N$$

箇ヨリ少クシカアリマセン。故ニ

$$\psi(N) \geqq \left\{1-(1-\alpha')(1-\frac{\gamma}{4})\right\}N$$

$$=\left\{\alpha'+\frac{\gamma}{4}(1-\alpha')\right\}N$$

$(\frac{\gamma}{4}<1$ デアルカラ$)$

$$\geqq \left\{\alpha+\frac{\gamma}{4}(1-\alpha)\right\}N$$

$$\geqq \left\{\alpha+\frac{\gamma}{4}\alpha(1-\alpha)\right\}N$$

コレデ証明デキタワケデアリマス。

尚コレハ余分ノコトデスガ上ノ証明ト同様ノ証明ハ $\alpha<\frac{1}{2}$ ノトキモ行フコトガ出来マス。故ニ $\alpha=\frac{1}{2}$ ノトキ *Khinchine* ノ定理ガ成立スルコトヲ仮定スレバ他ノ α ニツイテハ上ノヤウニ証明ガキルワケデアリマス。ソレ故

$\alpha=\frac{1}{2}$ ノトキ *Khinchine* ノ定理ガモット簡單ニ証明デキルカ、又ハ γ ノ値ヲ大キク（*Khinchine* ノ論文デハ $\gamma=\frac{1}{2}\times 10^{-8}$ ト云フトンデモナイ小サナ数デス）スルコトガ出來レバコノ証明法ハ更ニ有効ニナルワケデス。

——（四月一日受取）——